JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **15**, 60–77 (1975)

Tschebyscheff-Approximation durch γ-Polynome mit teilweise fixierten Frequenzen

JAN BRINK-SPALINK

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik, Universität Münster, 44 Münster, Roxeler Str. 62, F.R. Germany

Communicated by E. W. Cheney

1. EINLEITUNG

Wir betrachten den Raum V_N der γ-Polynome, die eine Verallgemeinerung der Exponentialsummen darstellen. In ihm wird eine beste Approximation (kurz b.A.) zu einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall gesucht.

Die Funktionen $F \in V_N$ werden durch N lineare und N nichtlineare Parameter, Frequenzen genannt, beschrieben. Es existieren i.a. mehrere b.A., und für $N \geqslant 3$ ist noch kein Verfahren bekannt, das mit Sicherheit die Lösungen liefert. Werner [12] führte dieses Problem durch Fixierung der Frequenzen auf eine Serie von linearen zurück; dabei durchlaufen die Frequenzen ein N-dimensionales Raster, was einen hohen Rechenaufwand zur Folge hat.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich die Dimension des Rasters um 2 reduzieren läßt: Schon bei Fixierung von $N - 2$ Frequenzen erhält man eine vollständige Theorie. Für die entstehenden Teilräume von V_N wird mit Hilfe des Tangentialkegels ein Alternantenkriterium für lokal b.A. hergeleitet. Es zeigt sich auch, daß infolge der Fixierung von Frequenzen die Vorzeichenklassen [1] neu definiert werden müssen. So enthält die positive Vorzeichenklasse i.a. nicht die Funktionen mit positiven Koeffizienten; die Vorzeichen drehen sich vielmehr um, wenn man eine ungerade Anzahl von festen Frequenzen überspringt.

Teilweise fixierte Parameter treten auch bei rationalen Funktionen [14] und Logarithmensummen $a_1 + \sum_{\nu=2}^{n} a_\nu \log(1 + t_\nu x)$ [5, 11] auf. Wie bereits G. Meinardus auf einer Tagung in Oberwolfach über Numerische Methoden der Approximationstheorie im Juni 1973 bemerkte, bestehen doch so starke Ähnlichkeiten zwischen der Theorie der Logarithmensummen und der Exponentialsummen, daß es möglich sein müßte, die Ergebnisse aus einer einheitlichen Theorie zu entwickeln. Das geschieht mit dieser Arbeit.

2. Definitionen, Darstellung von V_N und $V_{N\mathfrak{p}}$

Der Raum $C(X)$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sei normiert durch $\|f\| := \sup_{x\in X} w(x) \mid f(x)\mid$, w positiv und stetig.

Sei T offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und der Kern

$$\gamma : T \times X \to \mathbb{R}$$

sei stetig. Die eigentlichen γ-Polynome sind durch

$$V_N{}^0 := \left\{F(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \gamma(t_\nu ; x) \;\middle|\; \alpha_\nu \in \mathbb{R},\, t_\nu \in T\right\}$$

definiert [1]. Den Abschluß von $V_N{}^0$ bildet die Menge der (erweiterten) γ-Polynome

$$V_N := \left\{F(x) = \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \alpha_{\nu\mu} \gamma^{(\mu-1)}(t_\nu ; x) \;\middle|\; \alpha_\nu \in \mathbb{R},\, t_\nu \in T,\, \sum_{\nu=1}^{l} m_\nu \leqslant N\right\};$$

dabei sei die Existenz von $\gamma^{(\mu)} := (\partial^\mu / \partial t^\mu)\, \gamma \in C(T \times X)$ für $U = 0,..., N-1$ vorausgesetzt. Überdies fordern wir grundsätzlich die Zeichenregularität $ESR_{2N}(t)$ des Kernes γ. Diese wird in 2.2 der Vollständigkeit halber definiert, obwohl wir später stets nur die daraus resultierende Descartesche Regel 2.4 verwenden.

Zunächst geben wir eine rekursive Definition der Differenzenquotienten γ_μ von γ bzgl. t; dabei stimmt der Index μ mit der Zahl der t-Argumente überein:

$$\begin{aligned} &\gamma_1(t; x) := \gamma(t; x), \\ &\gamma_\mu(t_1 \cdots t_\mu ; x) := \frac{\gamma_{\mu-1}(t_1 \cdots t_{\mu-1} ; x) - \gamma_{\mu-1}(t_2 \cdots t_\mu ; x)}{t_1 - t_\mu}, \qquad t_1 \neq t_\mu, \\ &\gamma_\mu \text{ ist symmetrisch in } t_1, ..., t_\mu, \\ &\gamma_\mu(\underbrace{t \cdots t}_{\mu}; x) := \frac{1}{(\mu-1)!}\, \gamma^{(\mu-1)}(t; x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Der von Karlin [7, p. 49] eingeführte Begriff der Zeichenregularität läßt sich dann ohne Fallunterscheidung beschreiben:

Definition 2.2. Seien $T, X \subset \mathbb{R}$, und $\gamma: T \times X \to \mathbb{R}$ besitze Ableitungen bzgl. t mit $\gamma^{(\mu)} \in C(T \times X)$ für $\mu = 0,..., r-1$.

γ heißt extended sign regular der Ordnung r bzgl. t (kurz $ESR_r(t)$), wenn für jedes $k = 1, \ldots, r$ ein $\epsilon_k = \pm 1$ existiert, so daß

$$\epsilon_k \cdot \det[\gamma_i(t_1 \cdots t_i\,;\, x_j)]_{i,j=1}^{k} > 0$$

für alle $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$ und $x_1 < \cdots < x_k$ ist.

γ heißt extended totally positive (kurz $ETP_r(t)$), wenn alle $\epsilon_k = +1$ sind.

Beispiele. Der Kern $\gamma(t; x) = e^{tx}$ der Exponentialsummen und der Kern $\gamma(t; x) = (1 - tx)^{-1}$, $x \in [0, b]$, $t \in (-\infty, 1/b)$, der rationalen Funktionen sind ETP_r für alle $r \in \mathbb{N}$ (vgl. [7, p. 99–100] bzw. [1, Sect. 9]).

DEFINITION 2.3. Das γ-Polynom $F \in V_N$ sei in der Darstellung

$$F(x) = \sum_{\substack{t \in T \\ m_t > 0}} \sum_{\mu=1}^{m_t} \alpha_{t\mu} \gamma_\mu(t \cdots t; x)$$

mit $\alpha_{tm_t} \neq 0$ gegeben, die wegen der Zeichenregularität von γ eindeutig ist. Dann werden F zwei Zahlen in $\mathbb{N}$ und ein Vektor zugeordnet.

(a) $k(F) := \sum m_t$ heißt die Ordnung oder die Zahl der Frequenzen von F.

(b) $l(F) := \#\{t : m_t > 0\}$ heißt die Zahl der verschiedenen Frequenzen von F.

(c) $s(F)$, der Vorzeichenvektor von F, berechnet sich als Element von $\{-1, +1\}^{k(F)}$ wie folgt: Für eine Partialsumme $F_t = \sum_{\mu=1}^{m_t} \alpha_{t\mu} \gamma_\mu(t, \ldots, t; x)$ von F sei

$$s(F_t) := \operatorname{sign} \alpha_{tm_t} \underbrace{(\ldots, -1, +1, -1, +1)}_{m_t},$$

und für $F = F_{t_1} + \cdots + F_{t_l}$ mit $t_1 < \cdots < t_l$ erhält man $s(F)$ durch Aneinanderheften der Teilstücke $s(F_{t_1}), \ldots, s(F_{t_l})$.

Beispiel. Für $F(x) = 5\,\gamma_2(t_1, t_1\,;\, x) - 3\,\gamma_1(t_2\,;\, x) - \gamma_3(t_3, t_3, t_3\,;\, x)$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ gilt

$$k(F) = 2 + 1 + 3 = 6, \qquad l(F) = 3 \qquad \text{und} \qquad s(F) = (-+--+-).$$

Bemerkung. $s(F)$ besteht für $F(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \gamma(t_\nu\,;\, x) \in V_N{}^0$ einfach aus den Vorzeichen der Koeffizienten α_ν, und aus der so definierten Abbildung s: $V_N{}^0 \backslash V_{N-1}^0 \to \{-1, +1\}^N$ erhält man s: $V_N \backslash V_{N-1} \to \{-1, +1\}^N$ durch stetige Forsetzung [1, p. 23], falls V_N eine normale Familie im Sinne von 4.3 ist.

Wir führen für ein γ-Polynom F folgende Bezeichnungen ein:

$S(s(F))$ sei die Zahl der Zeichenwechsel in $s(F)$,

$Z(F)$ sei die Zahl der Nullstellen von F; dabei wird eine Nullstelle $x_i \in (a, b)$ doppelt gezählt, wenn F in einer Umgebung von x_i stets $\geqslant 0$ oder stets $\leqslant 0$ ist,

$\operatorname{sign} F(b+) := (-1)^m \operatorname{sign} F(b-)$, wenn b eine m-fache Nullstelle von F ist, heißt das "Vorzeichen von F rechts" (man beachte, daß nur $m = 0, 1$ zugelassen ist).

Schließlich sei

$$\tilde{\epsilon}_i := \epsilon_{i-1}/\epsilon_i$$

mit $\epsilon_i = \epsilon_i(\gamma)$ gemäß 2.2, $\epsilon_0 := 1$.
Die Descartesche Regel für γ-Polynome lautet jetzt (vgl. [1, Theorem 3.2]):

SATZ 2.4. *Sei F ein γ-Polynom der Ordnung k, und γ sei $ESR_k(t)$. Dann gilt:*

(i) $Z(F) \leqslant S(s(F))$ *oder* $F = 0$

(ii) *Im Falle* $Z(F) = S(s(F)) =: r - 1$ *ist* $s_k(F) = \tilde{\epsilon}_r \operatorname{sign} F(b+)$.

Aus 2.4(i) *ergibt sich die Nullstellenaussage*

$$Z(F) \leqslant k(F) - 1 \qquad \textit{oder} \qquad F = 0. \tag{2.4'}$$

Sie ist bei zusammenhängendem T zu der Zeichenregularität von γ äquivalent.

Im folgenden werden diejenigen γ-Polynome betrachtet, bei denen von den N Frequenzen P fixiert sind. Die Lage und Vielfachheit der fixierten Frequenzen wird durch eine Abbildung

$$p\colon T \to \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$t \mapsto p_t$, mit $\sum p_t = P$ beschrieben, und durch p ist der Teilraum V_{Np} definiert (Definition 2.6).

Abweichend von 2.3 sei ab jetzt in der Darstellung

$$F(x) = \sum_t \sum_{\mu=1}^{m_t} \alpha_{t\mu} \gamma_\mu(t \cdots t; x)$$

eines γ-Polynoms stets

$$m_t \geqslant p_t$$

und

$$\alpha_{tm_t} \neq 0, \qquad \text{falls} \qquad m_t > p_t \quad \text{ist}. \tag{2.5}$$

DEFINITION 2.6. Sei $\sum p_t = P \leqslant N$ und F ein γ-Polynom mit der Konvention (2.5).

(a) $k_f(F) := \sum_t (m_t - p_t)$ heißt die Zahl der freien Frequenzen von F,

(b) $l_f(F) := \#\{t\colon m_t - p_t \geqslant 1\}$ ist die Zahl der verschiedenen freien Frequenzen von F. Ferner sei

(c) $V_{Np} := \{F\colon k_f(F) \leqslant N - P\}$ die Menge der $F \in V_N$ mit den durch $t \mapsto p_t$ angegebenen fixierten Frequenzen, und

(d) $V^0_{Np} := \{F \in V_{Np} : l_f(F) = k_f(F)\}$ die Teilmenge derjenigen $F \in V_{Np}$, deren freie Frequenzen paarweise verschieden sind.

Bemerkung. $F \in V_{Np} \backslash V_{N-1,p}$ ist äquivalent zu $k_f(F) = N - P$.

3. EIN HINREICHENDES UND EIN NOTWENDIGES ALTERNANTENKRITERIUM FÜR BESTE APPROXIMATIONEN IN V_{Np}

In diesem Abschnitt werden zwei Kriterien für beste Approximationen hergeleitet; sie stützen sich nur auf die Länge der Alternante und fallen i.a. nicht zusammen. Der Tangentialkegel wird noch nicht benötigt. Von der Zeichenregularität wird nur die Nullstellenaussage (2.4′) benutzt.

DEFINITION 3.1. (a) F heißt lokal beste Approximation (kurz l.b.A.) zu f in V, wenn eine Umgebung $U \subset V$ von F existiert, so daß F beste Approximation zu f in U ist.

(b) Sei $g \in C(X)$, $g \neq 0$. Eine Alternante der Länge r für g besteht aus r Punkten $x_1 < \cdots < x_r$ mit

$$w(x_i)\, g(x_i) = \sigma\, (-1)^{r-i}\, \|g\|, \qquad i = 1,\dots, r,$$

wobei $\sigma = \operatorname{sign} g(x_r)$ das Vorzeichen der Alternante rechts ist. Die Länge der längsten Alternante für g bezeichnen wir mit $\operatorname{alt}(g)$.

SATZ 3.2. *Sei $f \in C(X)$, $F \in V_{Np}$, und γ sei $ESR_{2N-P}(t)$.*

(a) *Gilt* $\operatorname{alt}(f - F) \geqslant N + k_f(F) + 1$, *dann ist F eindeutige beste Approximation zu f in V_{Np}.*

(b) *Ist F lokal beste Approximation zu f in V_{Np}, dann gilt* $\operatorname{alt}(f - F) \geqslant N + l_f(F) + 1$.

Beweis. (a) Sei $\operatorname{alt}(f - F) \geqslant N + k_f(F) + 1 =: r$. Angenommen es gibt ein $G \neq F$ in V_{Np} mit $\|f - G\| \leqslant \|f - F\|$. Dann gilt für die Alternantenpunkte $x_1 < \cdots < x_r$ von $f - F$ mit $\sigma = +1$ oder $\sigma = -1$

$$(-1)^{r-i}\, \sigma\, (G(x_i) - F(x_i)) \geqslant 0 \qquad (i = 1,\dots, r).$$

Somit ist $Z(G - F) \geqslant r - 1 = N + k_f(F)$, während für die Ordnung des γ-Polynoms $G - F$ die Abschätzung

$$k(G - F) \leqslant P + k_f(G) + k_f(F) \leqslant N + k_f(F)$$

gilt. Das ist wegen $k(G - F) \leqslant 2N - P$ nach (2.4′) ein Widerspruch.

(b) Sei $F = \sum_t \sum_\mu \alpha_{t\mu} \gamma_\mu(t...t; x)$ gemäß Konvention (2.5). Als Ableitungen von F nach den freien Parametern erhält man folgende γ-Polynome:

$$\gamma_\mu(t \cdots t; x) \qquad (t \in T, 1 \leqslant \mu \leqslant m_t),$$
$$\alpha_{tm_t}\gamma_{m_t+1}(t \cdots t; x) \qquad (\text{für } t \in T \text{ mit } m_t > p_t),$$

und falls $k_f(F) < N - P$ ist, füge man noch die Funktionen

$$\gamma_1(t_i\,; x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant N - P - k_f(F))$$

hinzu mit Frequenzen t_i, die untereinander und von den in F vorkommenden verschieden sind. Der von obigen Funktionen aufgespannte lineare Raum W ist Tangentialmannigfaltigkeit von V_{Np} in F im Sinne von [9]. Er hat die Dimension $(P + k_f) + l_f + (N - P - k_f) = N + l_f$ und erfüllt wegen $N + l_f \leqslant 2N - P$ nach (2.4′) die Haarsche Bedingung. Da F eine l.b.A. ist, besitzt $f - F$ nach der Theorie von Meinardus und Schwedt [9, Satz 12] eine Alternante der Länge $N + l_f(F) + 1$. $\square$

Mit den beiden Kriterien dieses Satzes läßt sich der Fall $P = N - 1$ schon vollständig behandeln, da dann stets $l_f = k_f$, d.h. $V_{Np} = V_{Np}^0$ ist. Der Fall $P = N$ ist ohnehin trivial.

KOROLLAR 3.3. *Sei $f \in C(X)$, und γ sei $ESR_{2N-P}(t)$. Dann gilt*:

(a) *Ist F lokal beste Approximation zu f bzgl. V_{Np} und liegt F in V_{Np}^0, so ist F sogar eindeutige beste Approximation in V_{Np} und ist durch alt $(f - F) \geqslant N + k_f(F) + 1 = N + l_f(F) + 1$ charakterisiert.*

(b) *In V_{Np} mit $P = N - 1$ existiert höchstens eine beste Approximation zu f.*

In 3.3(a) wird nicht ausgeschlossen, daß es in V_{Np} weitere lokal beste Approximationen gibt.

4. BERECHNUNG DES TANGENTIALKEGELS $C_F V_{Np}$

Der hier definierte Tangentialkegel (vgl. [4, Definition 2.1]) ist größer als der im Beweis von 3.2(b) benutzte Tangentialraum und beschreibt die Umgebung von F in V_{Np} vollständiger.

DEFINITION 4.1. Sei E ein normierter Raum, M Teilmenge von E und $v \in M$. Dann heißt $h \in E$ Tangentenstrahl bei v an M, wenn eine stetige Abbildung ψ: $[0, 1] \to M$ mit $\psi(0) = v$ existiert, so daß für $\lambda \to 0$:

$$\| \psi(\lambda) - v - \lambda h \| = o(\lambda)$$

gilt. Die Menge aller Tangentenstrahlen bei v bildet den Tangentialkegel $C_v M$.

Bemerkung. Der Tangentenstrahl $h \in E$ ist rechtsseitige Fréchetableitung von ψ im Punkte 0.

Wir berechnen den Tangentialkegel zunächst für ein $F \in V_{Np}$ mit nur einer Frequenz: $l(F) = 1$.

LEMMA 4.2. *Sei $t \in T$, $0 \leqslant p_t \leqslant m_t =: m \leqslant N$ und*

$$F = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \gamma_\mu(t \cdots t; x) \in V_{mp}$$

mit $\alpha_m \neq 0$ falls $m > p_t$. Ferner sei

$$m^* := m + \min\{m - p_t, 2\}, \qquad \sigma := \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_m, & m - p_t \geqslant 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann enthält der Tangentialkegel $C_F V_{mp}$ den Raum

$$V_{m^*;\sigma}(t) := \left\{ h = \sum_{\mu=1}^{m^*} \delta_\mu \gamma_\mu(t \cdots t; x) \;\middle|\; \delta_\mu \in \mathbb{R}, \sigma\, \delta_{m^*} \geqslant 0 \right\},$$

der in den Fällen $m - p_t = 0$ oder 1 linear ist.

Beweis. Es sind Bahnen ψ: $[0, 1] \to V_{mp}$ zu konstruieren, die obige Funktionen h als Tangentialstrahlen liefern. Es seien $\delta_1, \ldots, \delta_m$, u, $v \in \mathbb{R}$, $v \geqslant 0$. Man betrachte die Bahnen

$$\psi(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{m} (\alpha_\mu + \delta_\mu \lambda)\, \gamma_\mu(t \cdots t; x), \qquad \text{falls} \quad m - p_t = 0,$$

$$\psi(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{m-1} (\alpha_\mu + \delta_\mu \lambda)\, \gamma_\mu(t \cdots t; x) + (\alpha_m + \delta_m \lambda)\, \gamma_m(t \cdots t, t + u\lambda; x), \quad \text{falls} \quad m - p_t = 1,$$

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) = {} & \sum_{\mu=1}^{m-2} (\alpha_\mu + \delta_\mu \lambda)\, \gamma_\mu(t \cdots t; x) \\ & + (\alpha_{m-1} + \delta_{m-1}\lambda)\, \gamma_{m-1}(t \cdots t, t + u\lambda - (v\lambda)^{1/2}; x) \\ & + [\alpha_m + \delta_m \lambda + (\alpha_{m-1} + \delta_{m-1}\lambda)(v\lambda)^{1/2}] \\ & \times \gamma_m(t \cdots t, t + u\lambda - (v\lambda)^{1/2}, t + u\lambda + (v\lambda)^{1/2}; x), \\ & \qquad \text{falls} \quad m - p_t \geqslant 2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Dann ist jeweils $\psi(\lambda) \in V_{mp}$ und $\psi(0) = F$. Ferner existiert die rechtsseitige Ableitung $\psi'(0) = (d\psi/d\lambda)(0+)$ und ergibt sich mit (2.1) zu

$$\psi'(0) = \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu \gamma_\mu \,, \qquad \text{falls} \quad m - p_t = 0 \text{ ist,}$$

$$\psi'(0) = \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu \gamma_\mu + u\alpha_m \gamma_{m+1} \,, \qquad \text{falls} \quad m - p_t = 1 \text{ ist,}$$

$$\psi'(0) = \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu \gamma_\mu + u(\alpha_{m-1}\gamma_m + 2\alpha_m \gamma_{m+1}) + v(\alpha_{m-1}\gamma_{m+1} + \alpha_m \gamma_{m+2}),$$
$$\text{falls} \quad m - p_t \geqslant 2 \text{ ist,}$$

wobei γ_μ für $\gamma_\mu(t \cdots t; x)$ steht.

Wegen der Stetigkeit von $\gamma_\mu(t_1, \ldots, t_\mu; x)$, $\mu = 1, \ldots, m^*$, ist $\psi'(0)$ Fréchetableitung von ψ: $[0, 1] \to C(X)$ und somit Tangentenstrahl. Aus obiger Darstellung von $\psi'(0)$ können für jedes $h \in V_{m^*,\sigma}(t)$ sukzessive die Parameter $v \geqslant 0$, u, δ_m, $\delta_{m-1}, \ldots, \delta_1$ so bestimmt werden, daß $\psi'(0) = h$ wird. □

Unter Normalitätsvoraussetzungen gilt sogar $V_{m^*,\sigma}(t) = C_F V_{mp}$:

Definition 4.3. (Siehe [1, Theorem 8.3]. Der Kern γ sei $ESR_{2N}(t)$. Der Raum V_N der γ-Polynome heißt normal, wenn die Parameterdarstellung $\phi: A \to V_N$

$$(\beta_1 \cdots \beta_N t_1 \cdots t_N) \mapsto \sum_{\mu=1}^{N} \beta_\mu \gamma_\mu(t_1 \cdots t_\mu; x)$$

mit $A := \{(\beta_1, \ldots, \beta_N t_1, \ldots, t_N) \mid \beta_i \in \mathbb{R},\ t_i \in T,\ t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N\}$ einen Homöomorphismus zwischen $V_N \backslash V_{N-1}$ und den Parametern $\phi^{-1}(V_N \backslash V_{N-1}) \subset A$ liefert.

Für die wichtigsten Kerne ist V_N normal, so z.B. für den Exponentialkern $\gamma(t; x) = e^{tx}$ und für $\gamma(t; x) = (1 - tx)^{-1}$ [1, Section 9].

Lemma 4.4. *Sei V_N normal. Ist dann $F = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \gamma_\mu(t \cdots t; x)$ mit $t \in T$, $p_t \leqslant m \leqslant N$, sowie $\alpha_m \neq 0$ falls $m > p_t$, so gilt*

$$C_F V_{mp} = V_{m^*,\sigma}(t),$$

wobei $V_{m^*,\sigma}(t)$ wie in 4.2 definiert ist. Außerdem existieren eine Umgebung U von F in V_{mp} und eine stetige Abbildung

$$\phi: U \to C_F V_{mp}$$

mit $\phi(F) = 0$ und der Abschätzung

$$\| G - F - \phi(G) \| = o(\| \phi(G) \|) \qquad \textit{für} \quad G \in U, \| G - F \| \to 0.$$

Beweis. Wir konstruieren die Abbildung ϕ wie folgt. Wegen der Normalität von V_N hat jedes Element G aus einer geeigneten Umgebung von F in V_{mp} die Gestalt

$$G = F[\delta, u] := \sum_{\mu=1}^{m} (\alpha_\mu + \delta_\mu)\, \gamma_\mu(\underbrace{t \cdots t}_{p_t}, t + u_{p_t+1}, \ldots, t + u_m\, ; x)$$

mit $\delta_1, \ldots, \delta_m, u_{p_t+1}, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$, und für $\| G - F \| \to 0$ geht $d := (\delta, u) \to 0$. Man entwickle jetzt G in eine Taylorreihe bzgl. $d = (\delta, u)$ bei $d = 0$:

$$G = F + F'd + \tfrac{1}{2}F''d^2 + \cdots,$$

und setze

$$\phi(G) := \begin{cases} F'd, & \text{falls} \quad m - p_t = 0 \text{ oder } 1 \\ F'd + \tfrac{1}{2}F''d^2, & \text{falls} \quad m - p_t \geqslant 2. \end{cases}$$

Man rechnet nach, daß $\phi(G) \in V_{m^*,\sigma}(t)$ ist, und bzgl. der gewünschten Abschätzung zeigt man im ersten Fall, daß $F' : \mathbb{R}^{m^*} \to V_{m^*}$ ein injektiver Operator ist und somit

$$\| F'd \| \geqslant C(F) \| d \|$$

gilt, woraus nach Definition der Frechetableitung

$$\| G - F - \phi(G) \| = o(\| d \|) = o(\| \phi(G) \|)$$

folgt; im zweiten Fall erhält man (vgl. Braess [2, Formel 10.10ff])

$$\| \phi(G) \| \geqslant C(F) \| d \|^2,$$

so daß $\| G - F - \phi(G) \| = o(\| d \|^2) = o(\| \phi(G) \|)$ gilt.

Wegen Lemma 4.2 ist nur noch $V_{m^*,\sigma}(t) \supset C_F V_{mp}$ zu zeigen. Dies ergibt sich aus [4, Lemma 3.1], das wir der Vollständigkeit halber zitieren. □

LEMMA. *Sei E normierter Raum, $v \in M \subset E$, und $N \subset C_v M$ sei ein abgeschlossener Kegel. Wenn zu einer Umgebung U von v in M eine stetige Abbildung ϕ: $U \to N$ mit $\phi(v) = 0$ und $\| u - v - \phi(u) \| = o(\| \phi(u) \|)$ existiert, dann ist $N = C_v M$.*

SATZ 4.5. *Sei V_N normal und $F = \sum_t \sum_{\mu=1}^{m_t} \alpha_{t\mu} \gamma_\mu(t \cdots t; x) \in V_{Np} \setminus V_{N-1,p}$ gemäß* (2.5). *Man setze*

$$m_t^* := m_t + \min\{2, m_t - p_t\}, \qquad \sigma_t := \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_{tm_t}, & m_t - p_t \geqslant 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist der Tangentialkegel durch

$$C_F V_{Np} = \left\{ h = \sum_t \sum_{\mu=1}^{m_t^*} \delta_{t\mu} \gamma_\mu(t \cdots t; x) \;\middle|\; \delta_{t\mu} \in \mathbb{R}, \sigma_t \delta_{tm_t^*} \geqslant 0 \right\}$$

gegeben, und es existiert eine Umgebung U von F in V_{Np} und eine stetige Abbildung

$$\phi\colon U \to C_F V_{Np}$$

mit $\phi(F) = 0$ *und der Abschätzung*

$$\| G - F - \phi(G)\| = o(\| \phi(G)\|) \qquad \textit{für} \qquad \| G - F\| \to 0.$$

Beweis. Sei $F = \sum_{\nu=1}^{l} F^{(\nu)}$, $F^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \alpha_{\nu\mu}\gamma_\mu(t_\nu, \dots, t_\nu\,;\, x)$. Wegen $F \in V_{Np}\backslash V_{N-1,p}$ und der Normalität von V_N existieren Umgebungen $U \subset V_{Np}$ von F und $U^{(\nu)} \subset V_{m_\nu}$ von $F^{(\nu)}$, so daß jedes $G \in U$ eindeutig in eine Summe

$$G = \sum_{\nu=1}^{l} G^{(\nu)}$$

mit $G^{(\nu)} \in U^{(\nu)}$ zerlegt werden kann. Ebenfalls folgt die Stetigkeit der Abbildungen $G \mapsto G^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, l$. Ist dann $\phi^{(\nu)} : U^{(\nu)} \to W^{(\nu)} := V_{m_\nu^*;\sigma_{t_\nu}}(t_\nu)$die in 4.4 konstruierte Abbildung, so erfüllt

$$\phi(G) := \sum_{\nu=1}^{l} \phi^{(\nu)}(G^{(\nu)})$$

die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \| G - F - \phi(G)\| &= \left\| \sum_{\nu=1}^{l} G^{(\nu)} - F^{(\nu)} - \phi^{(\nu)}(G^{(\nu)}) \right\| \\ &\leqslant \sum_{\nu} \| G^{(\nu)} - F^{(\nu)} - \phi^{(\nu)}(G^{(\nu)})\| \\ &\overset{4.4}{=} \sum_{\nu} o(\| \phi^{(\nu)}(G^{(\nu)})\|) = o(\| \phi(G)\|) \end{aligned}$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der $\phi^{(\nu)}(G^{(\nu)})$. Hieraus folgt wegen $\phi(G) \in \sum_{\nu=1}^{l} W^{(\nu)}$ unsere Behauptung $C_F V_{Np} = \sum_{\nu=1}^{l} W^{(\nu)}$ wie in 4.4, nachdem man die Inklusion $C_F V_{Np} \supset \sum_{\nu=1}^{l} W^{(\nu)}$ durch Anwendung von 4.2 auf die Partialsummen $F^{(\nu)}$ gezeigt hat. □

5. Charakterisierung von Lokal Besten Approximationen in V_{Np}

Mit Hilfe des in Abschnitt 4 berechneten Tangentialkegels und der Zeichenregularität wird ein zugleich notwendiges und hinreichendes Alternantenkriterium für lokal beste Approximationen in V_{Np} hergeleitet.

Durch den Tangentialkegel $W = C_F V_{Np}$ von V_{Np} in F sind die zu den Frequenzen $t_1 < \cdots < t_l$ gehörenden Zahlen $m_1{}^*, \ldots, m_l{}^* \in \mathbb{N}$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_l \in \{-1, 0, +1\}$ gemäß 4.5 vorgegeben. Ferner sei

$$I := \{\nu\colon 1 \leqslant \nu \leqslant l,\ \sigma_\nu \neq 0\}.$$

Ist $F \in V^o_{Np}$, dann ist I leer und W ein linearer Raum, so daß Satz 3.2 wegen $l_f(F) = k_f(F)$ vollständige Ergebnisse liefert. Im andern Fall berechne man aus den Zahlen $(m_\nu{}^*, \sigma_\nu)_{1 \leqslant \nu \leqslant l}$ die "Länge" d und das "Vorzeichen" σ des Kegels W wie folgt. Sei $\nu_* = \max\{i\colon i \in I\}$, und jedem $\nu \in I$, $\nu < \nu_*$ sei $\nu' = \min\{i\colon i \in I,\ i > \nu\}$ zugeordnet. Dann definiere man (vgl. [2, (12.2)])

$$r_\nu := \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu < \nu_* \text{ und } \sigma_{\nu'} \neq \sigma_\nu(-1)^{m^*_{\nu+1} + \cdots + m^*_{\nu'}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich setze man

$$\begin{aligned} d &:= \sum_{\nu=1}^{l} m_\nu{}^* - \sum_{\nu \in I} r_\nu, \\ \sigma &:= \sigma_{\nu_*}(-1)^{m^*_{\nu_*+1} + \cdots + m_l{}^*}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die Zahlen d und σ sind gerade so konstruiert, daß für die Vorzeichenvektoren von $h \in W$ folgende Beziehung gilt: Es ist $S(s(h)) \leqslant d - 1$, und im Falle $S(s(h)) = d - 1$ ist σ die letzte Komponente von $s(h)$.

Den Fall $F \in V^o_{Np}$ kann man unterordnen, wenn man

$$d := \dim W = \sum_{\nu=1}^{l} m_\nu{}^*$$

setzt und σ undefiniert läßt.

Beispiel. Es sei $l = 5$, $m_1{}^* = m_2{}^* = m_3{}^* = m_4{}^* = m_5{}^* = 3$, $\sigma_1 = -1$, $\sigma_3 = +1$, $\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$. Dann hat ein $h \in W$ der Ordnung 15 einen Vorzeichenvektor der Gestalt

$$s(h) = (- + -, \ldots, + - +, \ldots, \ldots).$$

Es ist $I = \{1, 3\}$, $\nu_* = 3$, $r_1 = 1$ wegen $\sigma_3 \neq \sigma_1(-1)^{m_2{}^* + m_3{}^*}$, $r_3 = 0$, also

$$d = 15 - \sum_{\nu \in I} r_\nu = 14 \qquad \text{und} \qquad \sigma = \sigma_{\nu_*}(-1)^{m_4{}^* + m_5{}^*} = +1.$$

Mit der Descarteschen Regel 2.4 ergibt sich jetzt die folgende Eigenschaft 5.2 (a) des Kegels W. Die Aussage (b) folgt wie in [2, Lemma 12.2].

LEMMA 5.2. *Für jedes $h \in W$ gilt*:

(a) *Es ist $Z(h) \leqslant d-1$ oder $h=0$, und im Falle $Z(h)=d-1$ ist* sign $h(b+) = \sigma\tilde{\epsilon}_d$.

(b) *Jede Interpolationsaufgabe $h(x_i) = h_i$, $i = 1,..., r$, $x_1 < \cdots < x_r$, mit $r \leqslant d$, $h_{i-1}h_i < 0$, sowie* sign $h_r = \sigma\tilde{\epsilon}_d$ *falls $r = d$ ist, ist in W lösbar.*

Zur Formulierung des Charakterisierungssatzes benötigen wir noch den Begriff der streng besten Approximation (vgl. [2, 13]).

DEFINITION 5.3. Sei $F \in V \subset C(X) \ni f$. F heißt streng beste Approximation zu f in V, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so daß für alle $G \in V$ gilt:

$$\|f - G\| \geqslant \|f - F\| + c\|G - F\|. \tag{*}$$

F heißt lokal streng beste Approximation, wenn eine Umgebung U von F in V existiert, so daß F streng beste Approximation zu f in U ist.

SATZ 5.4. *Sei $f \in C(X)$ und $F \in V_{Np} \backslash V_{N-1,p}$. Der Kern γ sei $ESR_{2N-p}(t)$, und V_N sei normal. Die Größen d und σ berechne man nach* (5.1) *aus dem Tangentialkegel $C_F V_{Np}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *F ist lokal beste Approximation zu f in V_{Np},*

(a′) *F ist lokal streng beste Approximation zu f in V_{Np},*

(b) *0 ist beste Approximation zu $f - F$ in $C_F V_{Np}$,*

(b′) *0 ist streng beste Approximation zu $f - F$ in $C_F V_{Np}$,*

(c) *$f - F$ besitzt eine Alternante der Länge d mit Vorzeichen $-\sigma\tilde{\epsilon}_d$ rechts, bzw. im Falle $F \in V^0_{Np}$: $f - F$ besitzt eine Alternante der Länge $d+1$.*

Beweis. In der Beweiskette (a′) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b′) $\Rightarrow$ (a′) ist die Aussage (a′) $\Rightarrow$ (a) trivial. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) ist Spezialfall von [4, Lemma 2.1]. Die Aussage (b) $\Rightarrow$ (c) folgt aus Lemma 5.2(b), und der Beweis von (c) $\Rightarrow$ (b′) stützt sich auf Lemma 5.2(a) [2, Lemma 12.2]. Beim Beweis von (b′) $\Rightarrow$ (a′) schließlich wird die Normalität von V_N benutzt:

Nach Satz 4.5 existiert eine Umgebung U von F in V_{Np} und eine stetige Abbildung ϕ: $U \to C_F V_{Np}$ mit $\phi(F) = 0$ und

$$\|G - F - \phi(G)\| = o(\|\phi(G)\|) \qquad \text{für} \quad \|G - F\| \to 0.$$

Andererseits gibt es nach Voraussetzung ein $c > 0$, so daß $\|f - F - h\| \geqslant$

$\|f - F\| + c\|h\|$ für alle $h \in W$ gilt. Für $G \in U$ erhalten wir also durch zweimalige Anwendung der Abschätzung (*):

$$\begin{aligned}
\|f - G\| &\geqslant \|f - F - h\| - \|G - F - h\|, \qquad h := \phi(G) \\
&\geqslant \|f - F\| + c\|h\| - o(\|h\|) \\
&\geqslant \|f - F\| + \frac{c}{2}\|h\|, \qquad \text{falls } \|h\| \text{ hinreichend klein} \\
&\geqslant \|f - F\| + \frac{c}{4}\|G - F\|, \qquad \text{falls } \|G - F\| \text{ klein,} \\
&\qquad\qquad \text{wegen der Stetigkeit von } \phi.
\end{aligned}$$

Folglich ist F lokal streng b.A. zu f in V_{Np}. □

6. Anwendung auf den Fall $P = N - 2$

Für die Fälle $P = N$ und $P = N - 1$ haben wir in 3.3 die Eindeutigkeit gezeigt. In diesem Abschnitt betrachten wir γ-Polynome mit zwei freien Frequenzen: $\sum p_t = P = N - 2$. Nach 3.3 brauchen wir wiederum nur solche $F \in V_{Np}$ betrachten, für die

$$k_f(F) = 2, \qquad l_f(F) = 1$$

ist. Es gelingt jetzt, mit Hilfe geeignet definierter Vorzeichenklassen in V_{Np} lokal beste Approximationen obiger Form zu trennen.

Definition 6.1. Sei $F \in V_{Np}$, $F = \sum_t \sum_{\mu=1}^{m_t} \alpha_{t\mu}\gamma_\mu(t \cdots t; x)$ gemäß (2.5). Der reduzierte Vorzeichenvektor $s_f(F)$ mit $k_f(F)$ Komponenten berechnet sich wie folgt. Man ordne die freien Frequenzen der Größe nach: $t_1 < \cdots < t_{l_f(F)}$, und definiere für $i = 1,\ldots, l_f$:

$$s_f^{(i)}(F) := \underbrace{(\cdots -+-+)}_{m_{t_i} - p_{t_i}} (\operatorname{sign} \alpha_{t_i m_{t_i}})\, (-1)^{\sum_{t > t_i} p_t}.$$

Dann erhält man $s_f(F)$ durch Hintereinanderhängen von $s_f^{(1)}(F),\ldots, s_f^{(l_f)}(F)$. Weiter sei

$$V_{Np}(s) := \{F \in V_{Np} : s_f(F) = s\}$$

die zum Vorzeichenvektor s gehörende Vorzeichenklasse in V_{Np}.

Für $P = 0$ stimmt diese Definition des Vorzeichenvektors mit der in 2.3 gegebenen überein. Jedoch ist $s_f(F)$ für $P \neq 0$ nicht einfach eine Restriktion von $s(F)$.

Beispiel. Sei $P = 2$, $t_1 < t_2$, $p_{t_1} = p_{t_2} = 1$, $p_t = 0$ sonst. Hat dann $F \in V_{3,p}$ die freie Frequenz t_3 und ist $\alpha = \alpha_{t_3 m_{t_3}}$ der höchste Koeffizient der Partialsumme F_{t_3}, so ist

$$s_f(F) = (+), \quad \text{falls} \quad t_1 < t_2 \leqslant t_3, \alpha > 0$$
$$\text{oder} \quad t_1 \leqslant t_3 < t_2, \alpha < 0$$
$$\text{oder} \quad t_3 < t_1 < t_2, \alpha > 0 \quad \text{ist.}$$

SATZ 6.2. *Sei $P = N - 2$ und $F \in V_{Np}$ mit $k_f(F) = 2$, $l_f(F) = 1$. Die freie Frequenz von F sei $\tilde{t}$, und σ sei das aus dem Tangentialkegel $C_F V_{Np}$ nach* (5.1) *zu berechnende Vorzeichen. Ist F lokal beste Approximation zu $f \in C(X)$ in V_{Np}, und ist $G \in V_{Np}$ eine mindestens ebenso gute Approximation: $\|f - G\| \leqslant \|f - F\|$, $G \neq F$, so gilt:*

(a) $s_f(F) = (-\sigma, +\sigma)$, *während* $s_f(G) = (+\sigma, -\sigma)$

(b) *Für die beiden freien Frequenzen $t_1 \leqslant t_2$ von G gilt $t_1, t_2 < \tilde{t}$ oder $t_1, t_2 > \tilde{t}$.*

Beweis. Sei $F = \sum_t \sum_{\mu=1}^{m_t} \alpha_{t\mu}\gamma_\mu(t \cdots t; x)$. Dann ist nach 4.5 $m_t^* = m_t = p_t$ für $t \neq \tilde{t}$ und $m_{\tilde{t}}^* = m_{\tilde{t}} + 2 = p_{\tilde{t}} + 4$, und für die Größen d und σ von $C_F V_{Np}$ gilt nach (5.1):

$$d = \sum m_t^* - \sum r_\nu = N + 2, \qquad \sigma = (\operatorname{sign} \alpha_{\tilde{t} m_{\tilde{t}}}) (-1)^{\sum_{t > \tilde{t}} m_t^*}.$$

Somit ist $s_f(F) = (-+) \cdot (\operatorname{sign} \alpha_{\tilde{t} m_{\tilde{t}}}) \cdot (-1)^{\sum_{t>\tilde{t}} p_t} = (-+)\,\sigma$, womit der erste Teil von (*a*) bewiesen ist.

Sei jetzt F eine l.b.A. Dann folgt aus Satz 5.4, daß $f - F$ eine Alternante der Länge d mit Vorzeichen $-\sigma\tilde{\epsilon}_d$ rechts besitzt. Ist $G \in V_{Np}$, $G \neq F$ und $\|f - G\| \leqslant \|f - F\|$, so gilt für die Differenz $G - F$ nach Satz 2.4:

$$S(s(G - F)) \geqslant (N + 2) - 1.$$

$G - F$ ist aber ein γ-Polynom der Ordnung

$$k(G - F) \leqslant P + k_f(F) + k_f(G) = N + k_f(G) \leqslant N + 2.$$

Zusammen erhält man: $k(G - F) = N + 2$ und $S(s(G - F)) = N + 1$, d.h. $s(G - F)$ alterniert, und mit 2.4 folgt weiter

$$s_{N+2}(G - F) = (-\sigma\tilde{\epsilon}_d)\,\tilde{\epsilon}_d = -\sigma.$$

Somit ist

$$s(G - F) = -\sigma\,(\underbrace{\cdots -+-+}_{N+2}). \tag{1}$$

Ferner ist notwendig $k_f(G) = 2$, und sind $t_1 \leqslant t_2$ die freien Frequenzen von G, so gilt

$$t_1\,,\, t_2 \neq \tilde{t} \tag{2}$$

Für ein γ-Polynom F in der Darstellung (2.5) bezeichne $m_t(F)$ die Ordnung und $\alpha_t(F)$ den höchsten Koeffizienten der Partialsumme $F_t \neq 0$. Aus (1) folgt dann für $\tau = t_1\,,\, t_2\,,\, \tilde{t}$:

$$\operatorname{sign} \alpha_\tau(G - F)\,(-1)^{\sum_{t>\tau} m_t(G-F)} = -\sigma. \tag{3}$$

Sei $s_f(G) =: (\sigma_1, \sigma_2)$. Nach Definition 6.1 ist $\sigma_2 = \operatorname{sign} \alpha_{t_2}(G)\,(-1)^{\sum_{t>t_2} p_t}$, und da für $t > t_2$ $p_t = m_t(G) \equiv m_t(G - F) \bmod 2$ gilt, erhält man

$$\sigma_2 \overset{(2)}{=} \operatorname{sign} \alpha_{t_2}(G - F)\,(-1)^{\sum_{t>t_2} m_t(G-F)} \overset{(3)}{=} -\sigma.$$

Im Falle $t_1 = t_2$ sind wir damit fertig: $s_f(G) = (-+)\,\sigma_2 = (+\sigma, -\sigma)$. Für $t_1 < t_2$ gilt analog

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\overset{6.1}{=} \operatorname{sign} \alpha_{t_1}(G)\,(-1)^{\sum_{t>t_1} p_t} \\ &\overset{(2)}{=} \operatorname{sign} \alpha_{t_1}(G - F)\,(-1)^{-1+\sum_{t>t_1} m_t(G-F)} \overset{(3)}{=} \sigma. \end{aligned}$$

Damit ist $s_f(G) = (+\sigma, -\sigma)$ bewiesen.

Aus (3) folgt für $\tilde{t}$: $-\sigma = \operatorname{sign} \alpha_{\tilde{t}}(G - F)\,(-1)^{\sum_{t>\tilde{t}} m_t(G-F)}$, also $\sigma = (\operatorname{sign} \alpha_{\tilde{t}m_{\tilde{t}}})\,(-1)^{\sum_{t>\tilde{t}} m_t(G)}$. Da aber auch $\sigma = (\operatorname{sign} \alpha_{\tilde{t}m_{\tilde{t}}})(-1)^{\sum_{t>\tilde{t}} p_t}$ ist, ist $\sum_{t>\tilde{t}} m_t(G) - p_t$, die Zahl der freien Frequenzen von G, die größer als $\tilde{t}$ sind, eine gerade Zahl. Somit ist auch (b) bewiesen. □

Aus 6.2(a), zusammen mit 3.3, erhält man folgendes Ergebnis, das in ähnlicher Form für den Spezialfall $N = 2$, also $P = 0$, schon bekannt war [1]:

KOROLLAR 6.3. *In V_{Np} mit $P = N - 2$ gibt es höchstens zwei lokal beste Approximationen zu gegebenem $f \in C(X)$. Wenn zwei beste Approximationen existieren, so gilt für beide $k_f = 2$, $l_f = 1$, und in jeder der Klassen $V_{Np}(-+)$, $V_{Np}(+-)$ liegt genau eine von ihnen.*

Für die Fälle $N - P \geqslant 3$ sind die hier entwickelten Methoden nicht fein genug. Jedenfalls lassen sich mit den bekannten Vorzeichenklassen lokal beste Approximationen nicht trennen, wie ein Beispiel in [2, Sect. 13] zeigt: In V_3 ($N = 3$, $P = 0$) können in der Vorzeichenklasse $V_3(+--+)$ zwei lokal beste Approximationen existieren.

7. Anwendung auf Logarithmensummen

Für die von Dunham [5, 6] und Schmidt [11] untersuchten Logarithmensummen erhalten wir eine vollständige Theorie, wenn wir die obigen Ergebnisse formal auf den Kern

$$\begin{aligned} \gamma(t; x) &= \frac{\log(1 - tx)}{\log(1 - tb)}, \qquad && x \in [0, b], \quad b > 0, \\ \gamma(0; x) &:= \lim_{t \to 0} \gamma(t; x) = \frac{x}{b}, && t \in (-\infty, 1/b), \end{aligned} \tag{7.1}$$

anwenden und die uneigentliche Frequenz $t = -\infty$ fixieren ($p_{-\infty} = 1$); dabei sei $\gamma(-\infty; x) = 1$, und wegen $\gamma_\mu(-\infty, ..., -\infty; x) = 0$, $\mu \geqslant 2$, kommt bei $t = -\infty$ auch keine freie Frequenz hinzu. Die strengen Beweise beruhen darauf, daß für jede Logarithmensumme $u \in V_n$ die Ableitung $u' = du/dx$ ein γ-Polynom der Ordnung $n - 1$ zu dem total positiven Kern [1, Section 9]:

$$r(t; x) = (1 - tx)^{-1} \tag{7.2}$$

der rationalen Funktionen ist. Den Raum dieser γ-Polynome bezeichnen wir mit R_{n-1}. Der Raum der eigentlichen Logarithmensummen ist durch

$$V_n{}^0 = \left\{ u \in C[0, b] \colon u(x) = a_1 + \sum_{\nu=2}^{n} a_\nu \gamma(t_\nu ; x),\, a_\nu \in \mathbb{R},\, t_\nu \in (-\infty, 1/b) \right\}$$

definiert; sein Abschluß ist

$$V_n = \{u \in C[0, b] \colon u' \in R_{n-1}\}. \tag{7.3}$$

Für die Logarithmensummen $u \in V_n$ gilt eine Descartesche Regel, die sich mit Hilfe des reduzierten Vorzeichenvektors $s_f(u)$ formulieren läßt (Definition 6.1):

Satz 7.4. *Für jede Logarithmensumme u gilt $Z(u) \leqslant 1 + S(s_f(u))$, und im Falle $Z(u) = 1 + S(s_f(u))$ ist sign $u(b+) = s_f(u)_*$, wobei $s_f(u)_*$ die letzte Komponente von $s_f(u)$ bezeichnet.*

Der Beweis ergibt sich aus Satz 2.4, angewandt auf u', und dem Satz von Rolle. Es gilt $s_f(u) = s(u')$, denn es ist

$$(d/dx)\, \gamma_m(t \cdots t; x) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu(t)\, r_\mu(t \cdots t; x)$$

mit positivem $c_m(t) = -t/\log(1 - tb)$. Ferner beachte man, daß im Falle $Z(u) = 1 + S(s_f(u))$ alle Nullstellen von u' zwischen denen von u liegen. Zu $u \in V_n$ erhält man gemäß 4.5 den Tangentialkegel $C_u V_n$ mit den Größen $(m_t^*, \sigma_t)_{-\infty \leqslant t < 1/b}$, aus denen man nach (5.1) die Zahlen d und σ bestimmt. Für jedes $h \in C_u V_n$ ist dann $1 + S(s_f(h)) \leqslant d - 1$, und bei Gleichheit gilt $s_f(h)_* = +\sigma$. Mit $\tilde{\epsilon}_d := +1$ gilt also 5.2(a) für Logarithmensummen. Da R_{n-1} normal ist [1, Section 9], folgt jetzt aus Satz 5.4:

SATZ 7.5. *Sei $f \in C[0, b]$, $u \in V_n \backslash V_{n-1}$. Dann sind äquivalent:*

(a) *u ist lokal beste Approximation zu f in V_n,*

(a') *u ist lokal streng beste Approximation zu f in V_n,*

(b) *0 ist beste Approximation zu $f - u$ in $C_u V_n$,*

(b') *0 ist streng beste Approximation zu $f - u$ in $C_u V_n$,*

(c) *$f - u$ besitzt eine Alternante der Länge d mit Vorzeichen $-\sigma$ rechts, bzw. im Falle $u \in V_n^0$: $f - u$ besitzt eine Alternante der Länge $d + 1$.*

Diese Ergebnisse gehen über die von Dunham und Schmidt hinaus.

ANERKENNUNG

Herrn Prof. Braess danke ich für wertvolle Hinweise und Anregungen während der Anfertigung dieser Arbeit.

LITERATUR

1. D. BRAESS, Chebyshev approximation by γ-polynomials I, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 20–43.
2. D. BRAESS, Chebyshev approximation by γ-polynomials II, *J. Approximation Theory* **11** (1974), 16–37.
3. D. BRAESS, Die Konstruktion der Tschebyscheff-Approximierenden bei der Anpassung mit Exponentialsummen, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 261–273.
4. D. BRAESS, Kritische Punkte bei der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation, *Math. Z.* **132** (1973), 327–341.
5. C. D. DUNHAM, Chebyshev approximation by $A + B \log(1 + CX)$, *J. Inst. Math. Appl.* **8** (1971), 371–373.
6. C. D. DUNHAM, *J. Inst. Math. Appl.* **10** (1972), 369–372.
7. S. KARLIN, "Total Positivity," Vol. I, Stanford University Press, Stanford, 1968.
8. G. MEINARDUS, Über ein Problem von L. Collatz, *Computing* **8** (1971), 250–254.
9. G. MEINARDUS UND D. SCHWEDT, Nichtlineare Approximation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17** (1964), 297–326.
10. E. SCHMIDT, Zur Kompaktheit bei Exponentialsummen, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 445–454.
11. E. SCHMIDT, On the approximation by sums of logarithms, to appear.

12. H. Werner, Tschebyscheff-Approximation with sums of exponentials, *in* "Approximation Theory," (A. Talbot, Ed.), Academic Press, London, 1970.
13. D. Wulbert, Uniqueness and differential characterization of approximations from manifolds of functions, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 350–366.
14. D. Braess, Rationale Interpolation, Normalität und Monosplines, *Numer. Math.* **22** (1974), 219–232.